東京大学理科 I 類　数学 II　担当戸瀬

I $A \in M_5(\mathbb{C})$ の固有多項式と最小多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^5,\ m_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2 \qquad \cdots (\sharp)$$

であることが分かっている.
(1) $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_5} \in \mathbb{C}^5$ が次の条件を満たしているとする.

(i) $(A - \alpha I)\vec{v_1} \neq \vec{0},\ (A - \alpha I)\vec{v_3} \neq \vec{0}$
(ii) $\vec{v_2} = (A - \alpha)\vec{v_1},\ \vec{v_4} = (A - \alpha)\vec{v_3}$
(iii) $\vec{v_2},\ \vec{v_4},\ \vec{v_5}$ は線形独立である.

この条件の下で, $P = (\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_5})$ が正則であることを示し, A の Jordan 標準形を求めよ.
(2) $(\sharp)$ の下で (1) と異なる Jordan 標準形を持った場合があるならば, それを与えよ.

II

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ の Jordan 標準形を求めよ.

III (1)

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -5 & -6 \\ 5 & -2 & -3 \\ 27 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$ の最小多項式が
$m_A(\lambda) = \Phi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$ であることを示せ.

(2)

$$W(2) := \ker(A - 2I)^2,\ W(-1) := \ker(A + I)$$

とおく. 直和分解

$$\mathbb{C}^3 = W(2) \oplus W(-1)$$

において

$$\vec{x} \in \mathbb{C}^3 \text{ に対して, } \vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}\ (\vec{x_1} \in W(2),\ \vec{x_2} \in W(-1))$$

とするとき, $\vec{x_1},\ \vec{x_2}$ を A と $\vec{x}$ で表示せよ.
ヒント

$$\frac{1}{(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)} = \frac{\alpha\lambda + \beta}{(\lambda - 2)^2} + \frac{\gamma}{\lambda + 1}$$

IV $A \in M_3(\mathbb{C})$ に対して

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \gamma)(\lambda - \beta)$$

が成立するとする. λ の多項式 $f(\lambda)$ に対して

$$\Phi_{f(A)}(\lambda) = (\lambda - f(\alpha))(\lambda - f(\beta))(\lambda - f(\gamma))$$

を示せ.

V

$$\text{実対称行列 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ を考える. } \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \text{とする.}$$

$||\vec{x}|| = 1$ の下で $(A\vec{x},\ \vec{x})$ を最大化・最小化せよ.

VI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & -2 & 1 & 13 \\ 9 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 11 \end{pmatrix} \text{ に対して, } I_m(A) \text{ と } \ker(A) \text{ の基底を求めよ.}$$

VII

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ が張る部分空間を } V,$$

$$\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a_4} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ が張る部分空間を } W \text{ とする.}$$

部分空間 $V \cap W$ の基底を求めよ.