2004 年度 数学 IB 前期期末試験問題

理科１類 1〜3,21〜24 組９月１日（水）２限 10:50-12:20（９０分）　斎藤　毅

- 問題用紙　１枚、解答用紙　両面２枚、計算用紙１枚
- 筆記用紙、計時機能のみの時計　以外もちこめません。
- 途中の計算などもできる限りくわしく書いて下さい。

第１問　逆３角関数

$$\mathrm{Arcsin}\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

について、次の問いに答えよ.

(1)　$\mathrm{Arcsin}\ \dfrac{1}{2}$ を求めよ.

(2)　不等式

$$\left| \mathrm{Arcsin} \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{9} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}} \right| \leq \frac{1}{10^8}$$

を示せ.

第２問　極限

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

を求めよ.

第３問　$f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ とおく.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^4} = 0$$

をみたす４次多項式 $g(x)$ を求めよ.

第４問　a を実数とし, $f(x) > 0, g(x) > 0$ を $x \geq a$ で定義された連続関数とする. $x > a$ で関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が単調減少であるとする. $x > a$ に対し,$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$,　$G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ とおく.

$x > a$ に対し, $\dfrac{F(x)}{G(x)} > \dfrac{f(x)}{g(x)}$ であることを示せ.

略解 1　(1) $\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

(2)
$$|\,\text{左辺}\,| = \sum_{k=10}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{2^{2k+1}}$$
$$\le \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{21}\sum_{k=10}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{3}{4}\frac{5}{126}\frac{1}{2^{22}}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \le \frac{1}{25}\frac{1}{2^{22}} = \frac{1}{10^2\cdot 2^{20}}$$
$$= \frac{1}{10^2\cdot 1024^2} \le \frac{1}{10^8}$$

2　区分求積法より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\mathrm{Arctan}\ \ x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

3　$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots$ だから,

$$\frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \cdots$$

である. よって, $\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \cdots$ であり,

$$g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720}.$$

4　平均値の定理の一般化より, $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{f(t)}{g(t)}$ をみたす $a < t < x$ がある. したがって $\frac{F(x)}{G(x)} > \frac{f(x)}{g(x)}$ である. したがって $\frac{F(x)}{G(x)} > \frac{f(x)}{g(x)}$ である.

1(1)[10] (2)[30] 2[20] 3[20] 4[20]