数理科学 I 前期末試験

(2005 年 7 月 20 日 4 限,　担当 筧)

(解答用紙は両面 1 枚とします。それに収まるように書いて下さい。)

$\boxed{1}$ (x, y) が、関係式

$$\cos(\pi xy) - \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = 0$$

を満たすとする。

(1) $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} \right)$ の適当な近傍で陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを, 陰関数定理を用いて証明せよ。

(2) $\varphi'\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} \right)$ を求めよ。ただし, $\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}(x)$ である。

$\boxed{2}$ 重積分を経由することで, 次の反復積分の順序を交換せよ。(下記では, まず y で積分してから x で積分するようになっている。これを, x で積分してから y で積分するように書き換える。)

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{1/(x+1)} f(x, y) dy,$　　　(2) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy.$

$\boxed{3}$ 次の重積分の値を求めよ：

$$\iint_D e^{-x^2} dxdy, \qquad D = \{(x, y) \,|\, 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}.$$

$\boxed{4}$ 次の広義積分が発散することを示せ：

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dxdy, \qquad D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$\boxed{5}$ 3 次元空間内の領域 D で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}$ $((x, y, z) \in D)$ に対して, $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{f}) = 0$ であることを示せ。ただし, $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ は全て D で C^2 級として, 「C^2 級」という条件がどこで用いられるかも明記せよ。

$\boxed{6}$ 座標空間内において, $z = \phi(x, y)$ で表される曲面を考える。このとき, ベクトル $\mathrm{grad}\,\phi(a, b)$ を,

$$\mathrm{grad}\,\phi(a, b) = \begin{bmatrix} \phi_x(a, b) \\ \phi_y(a, b) \end{bmatrix} \qquad (\text{ただし}, \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x},\ \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y})$$

で定める。ベクトル $\mathrm{grad}\,\phi(a, b)$ は, 点 (a, b) において, 曲面の傾きが最も急であり, かつ ϕ の値が増加する方向を表していると考えられる。なぜそのように考えられるかを説明せよ。